

Flussgeschwindigkeit und Drücke in einem Durchlauf mit Fluiden und Variation des Durchmessers

Kai-Fabian Henning, Christian Benjamin Ries

{Kai-Fabian.Henning, Christian_Benjamin.Ries}@fh-bielefeld.de

Department of Engineering and Mathematics, University of Applied Sciences Bielefeld,
Am Stadtholz 24, 33609 Bielefeld, Germany

Zusammenfassung—Die meisten empfinden leises vor sich hin plätschern des Wasser als sehr idyllisch und können dabei entspannen und die Gedanken baumeln lassen. Was viele nicht wissen, die Ruhe trägt. Ein Bachlauf - ob klein bis groß - birgt ein hohes Gefahrenpotential und ist in vielen Fällen sogar lebensgefährlich. Was wohl jeder noch aus der Schule in Erinnerung hat ist, dass bei zunehmender Verringerung des Durchmessers eines Rohrs die Fließgeschwindigkeit und durchdrückende Kraft immer größer wird, bei gleich bleibender Flüssigkeitsmenge. Diese Arbeit untersucht dieses Phänomen auf einfache Weise durch die Unterstützung mit dem COMSOL Multiphysics Simulationswerkzeug. Weiterhin wird ein Simulationsmodell erstellt mit dem die auftretenden Kräfte in Fluiden nachempfunden werden kann.

Abstract—Just most people know that quiet floating plashy water has a impact of the sense of being. Most of them have no idea about the risks of streaming fluids. Below the water surface exists one of the uncounted dangerous force for the human species. The kind of force is very chaotic sorted and difficult to control. One of the way to discover this mysterious force can be a model of a tube to get a more manageable controller device. Modeled tubes offer the availability to scale the diameter, so it is feasible to make some research of this hidden force. Just everyone can imagine that the force is increasing when the diameter is scaled down, or? In this work we will present a simulation model for COMSOL Multiphysics to discover this force with a tube which has a adjustable diameter.

I. EINLEITUNG

IN DIESER Arbeit wird das COMSOL Multiphysics Simulationswerkzeug verwendet [1] um eine Simulation von Fluiden durchführen zu können. Für solche Simulationen bietet das COMSOL Multiphysics Simulationswerkzeug das Modul *laminar flow interace*, mit dem die Fluide durch die *Navier-Stokes-Gleichung* beschrieben werden. Es wird eine Vereinfachung eines gebogenen Rohrs modelliert. Durch dieses Rohr können verschiedene Fluide oder Gase fließen, in dieser Arbeit werden nur Fluide behandelt.

II. THEORIE ZUM COMSOL *laminar flow interface*

Zum besseren Verständnis der in COMSOL Multiphysics simulierten Strömung werden nachfolgend die notwendigen physikalischen Grundlagen vorgestellt. Die Tabelle I listet und erläutert die Variablen der nachfolgenden Abschnitte.

Diese Arbeit gilt als Prüfungsleistung für die Vorlesung "Multiphysik Simulationen" des Lehrenden Prof. Dr. rer. nat. Schröder im Masterstudiengang "Optimierung und Simulation" im Sommersemester 2010.

Variable	Bedeutung	SI-Einheit
W	Arbeit	$J = kg * m^2 * s^{-2}$
ρ	Dichte	$\frac{kg}{m^3}$
p	Druck	$N * m^{-2}$
F_P	Druckkraft	$N = m * kg * s^{-2}$
μ	Dynamische Viskosität	$\frac{Pa * s}{m} = Ns * m^{-2} = kg * m^{-1} * s^{-1}$
E	Energie	$\frac{W}{kg * m^2 * s^{-3}} = J * s^{-1}$
g	Erdbeschleunigung	$m * s^{-2}$
\mathbf{I}	Identität = Einheitsmatrix	dimensionslos
F	Kraft	$N = m * kg * s^{-2}$
m	Masse	kg
F_R	Reibungskraft	$N = m * kg * s^{-2}$
F_G	Schwerkraft	$N = m * kg * s^{-2}$
S	Spannungstensor	$Pa = N * m^{-2}$
\mathbf{u}	Strömungsgeschwindigkeit	$m * s^{-1}$
V	Volumen	m^3
\dot{V}	Volumenstrom	$m^3 * s^{-1}$

Tabelle I
BESCHREIBUNG FÜR DIE VARIABLEN IN DEN NACHFOLGENDEN
ABSCHNITTEN

A. Kräfte auf ein Volumenelement

Die Beschreibung der Bewegung von Flüssigkeiten erfordert die Bestimmung aller Kräfte, die auf ein Volumenelement ΔV wirken. Die resultierende Gesamtkraft F aller Kräfte setzt sich dabei aus der Druckkraft F_P aufgrund von Druckdifferenzen, der Schwerkraft F_G sowie der inneren Reibungskraft F_R abhängig von der Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} zusammen:

$$F = F_P + F_G + F_R \quad (1)$$

Für die Schwerkraft dF_G auf ein Volumenelement ΔV mit der Masse $\Delta m = \rho * \Delta V$ gilt:

$$dF_G = \Delta m * g = \rho * g * \Delta V \quad (2)$$

B. Druckkraft

Zur Bestimmung der Druckkraft F_P auf ein Volumenelement $\Delta V = dx * dy * dz$ wird exemplarisch eine

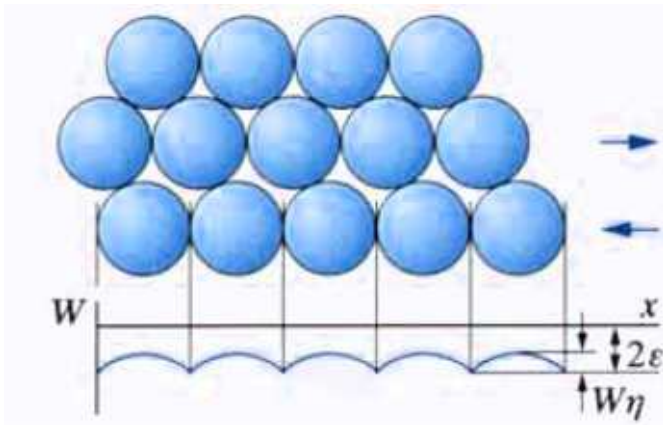


Abbildung 1. Impulsübertragung zwischen zwei Flüssigkeitsschichten - Quelle: [4, S. 11]

Druckänderung $\frac{\partial p}{\partial x}$ in der $dydz$ -Ebene betrachtet. Für den Druck auf der Gegenfläche gilt:

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (3)$$

Daraus resultiert die Kraft dF_x :

$$dF_x = p * dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} * dx \right) dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (4)$$

Analog gilt vektoriell:

$$d\mathbf{F}_R = -\nabla p - dV \quad (5)$$

C. Innere Reibung, Viskosität, Reibkraft

Flüssigkeiten haben eine spezifische innere Reibung, abhängig von ihrer Viskosität μ . Die Viskosität μ einer Flüssigkeit ist abhängig von der Temperatur und der Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} . Aufgrund der thermischen Bewegung der Moleküle in der Flüssigkeit kommt es zu einer Überlagerung der Moleküle benachbarter Flüssigkeitsschichten, wie in Abbildung 1 dargestellt. Bewegen sich zwei Schichten mit der Relativgeschwindigkeit u_x zueinander hin, übertragen die Moleküle einen Teil ihrer Impulsenergie an ihre Nachbarschichten. Innerhalb der Grenzschicht bildet sich ein Geschwindigkeitsgradient $\frac{du_x}{dy}$ bzw. Impulsgradient $j_p = \mu \frac{du_x}{dy}$ (senkrecht zu u_x) aus, wie dies schematisch in Abbildung 2 gezeigt ist. Vektoriell gilt für die Reibkraft \mathbf{F}_R auf ein Volumenelement dV bzw. V und eine beliebige Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} :

$$d\mathbf{F}_R = \mu * \Delta \mathbf{u} * dV \Leftrightarrow \mathbf{F}_R = \mu * \int_V \Delta \mathbf{u} dV \quad (6)$$

D. Navier-Stokes-Gleichung

Dieser Abschnitt enthält eine Kurzfassung zur Herleitung der Navier-Stokes-Gleichung [3, S. 232ff]. Die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen $\Delta m = \rho * \Delta V$ eines strömenden Mediums

$$dF = \Delta m * \ddot{r} = \rho * \Delta V \frac{d\mathbf{u}}{dt} * dF_P + dF_G + dF_R \quad (7)$$

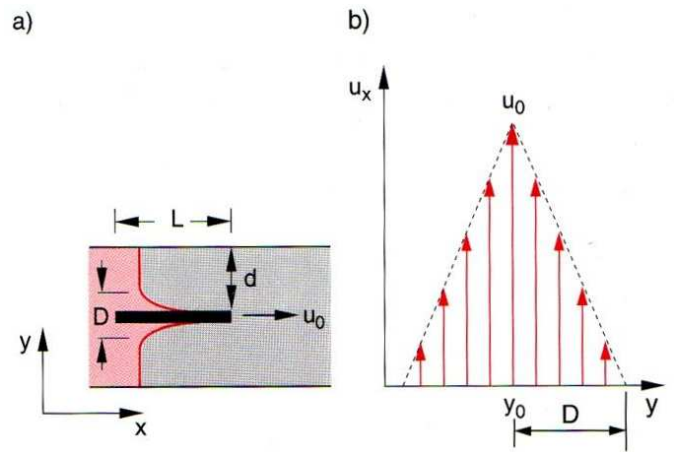


Abbildung 2. Geschwindigkeits- bzw. Impulsübertragung in Flüssigkeiten (D = Dicke der Grenzschicht) - Quelle: [3, S. 227]

liefern zusammen mit der substantiellen Beschleunigung

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} * \nabla) \mathbf{u} \quad (8)$$

die Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} * \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho * \mathbf{g} + \mu * \Delta \mathbf{u} \quad (9)$$

Da die Viskosität μ von der Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} abhängig ist, wird im Reibungsterm in Gleichung 6 der Teil $\mu * \Delta \mathbf{u}$ durch den viskosen Spannungstensor S ersetzt [2]:

$$S = \mu * \nabla \left((\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3} * (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{I} \right) \quad (10)$$

Schließlich folgt die Navier-Stokes-Gleichung mit der dynamischen Viskosität μ :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} * \nabla \right) * \mathbf{u} = \quad (11)$$

$$(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} * (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{I} \quad (12)$$

III. STATIONÄRE LAMINARE STRÖMUNGEN

A. Definition

Laminare Strömungen liegen genau dann vor, wenn die Reibungskräfte \mathbf{F}_R groß sind gegenüber den Beschleunigungskräften \mathbf{F}_P (Druck) und \mathbf{F}_G (Schwerkraft) [3, S. 227ff]. Dabei hängt die Reibkraft \mathbf{F}_R von der spezifischen dynamischen Viskosität μ der Flüssigkeit ab. Überschreiten die auftretenden Beschleunigungskräfte eine bestimmte kritische Grenze, reißt die laminare Strömung ab und es kommt zu turbulenten Strömungen mit Verwirbelungen, wie dies Abbildung 3 zeigt. Die Grenze hängt dabei zum einen von der Viskosität und Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit und zum anderen von der Form des Hindernisses ab.

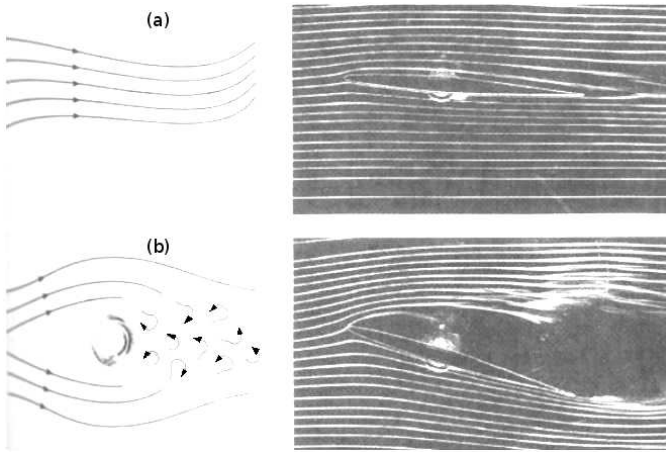


Abbildung 3. (a) Laminare und (b) turbulente Strömungen im Vergleich - Quelle: [4, S. 12]

B. Reynolds-Zahl

Die *Reynolds-Zahl* ist eine elementare Größe zur Beschreibung einer Strömung [3, S. 243]. Die dimensionslose Größe ist definiert in den Gleichungen 13 und 14 mit U als mittlere Geschwindigkeit und L als repräsentative Länge.

$$Re = \frac{\rho * L^2}{\mu * T} = \frac{\mu * U^2 * L^3}{\mu * U * L^2} = \quad (13)$$

$$\frac{2 * E_{Kinetisch}}{W_{Reibung}} = \frac{\rho * U * L}{\mu}, \text{ mit } U = \frac{L}{T}, T = \text{Zeit} \quad (14)$$

Wie die Gleichungen 13 und 14 zeigen ist die *Reynolds-Zahl* der Quotient aus dem doppelten der kinetischen Energie der Strömung und der Reibungsarbeit die umgewandelt wird, wenn sich ein Volumenelement mit dem Durchmesser L und der Geschwindigkeit U um die Strecke L bewegt. Bei einer kleinen *Reynolds-Zahl* überwiegt die Reibung gegenüber den Beschleunigungskräften und es liegt eine laminare Strömung vor. Bei einer großen *Reynolds-Zahl* dominiert entsprechend die kinetische Energie vor der Reibung und es kommt zu turbulenten Verwirbelungen.

Für eine Wasserströmung in einem Kreiszyylinder ergibt sich experimentell eine kritische *Reynolds-Zahl* aus:

$$Re_c = \frac{\rho U_c r}{\mu} = 2300 \quad (15)$$

C. Stationäres Geschwindigkeitsprofil

Bei einer stationären laminaren Strömung ($\mu > 0$) durch einen Kreiszyylinder mit dem Radius R kommt es auf Grund der Reibungskräfte zur Ausbildung eines Geschwindigkeitsprofil $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, welches bedingt durch den Kreiszyylinder rotations-symmetrisch ist. Für einen coaxialen Teilzyylinder mit Radius r gilt ein Gleichgewicht zwischen der Reibungskraft F_R auf der Zylinderfläche und der Druckkraft F_P auf den Stirnseiten. p_1 und p_2 sind dabei die Drücke an den jeweiligen Stirnseiten.

$$-\mu * 2r\pi * L \frac{du}{dr} = r^2\pi * (p_1 - p_2) \quad (16)$$

Variable	Bedeutung	SI-Einheit
\dot{V}	Volumenstrom durch das Rohr	$\frac{m^3}{s}$
r	Innenradius des Rohrs	m
l	Länge des Rohrs	m
μ	dynamische Viskosität der strömenden Flüssigkeit	$Pa * s$
Δp	Druckdifferenz zwischen Anfang und Ende des Rohrs	Pa
z	Flussrichtung	dimensionslos

Tabelle II
VARIABLENBESCHREIBUNG DER GLEICHUNG 18

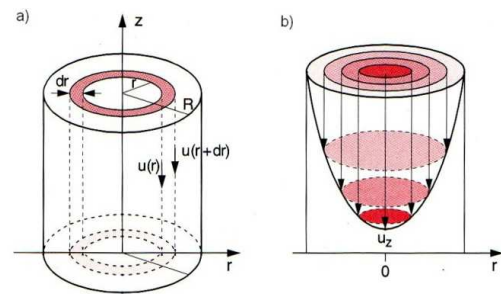


Abbildung 4. a) zur Herleitung des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes und b) Geschwindigkeitsprofil

Durch Integration über r mit der Randbedingung $u(R) = 0$ ergibt sich schließlich das Profil $u(r)$ aus Gleichung 17. R ist der Radius und r ist der Abstand vom Mittelpunkt aus.

$$u(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} * (R^2 - r^2) \quad (17)$$

D. Volumenstrom

Der Volumenstrom \dot{V} , d.h. das geflossene Volumen V pro Zeiteinheit, bei einer laminaren Strömung einer homogenen viskosen Flüssigkeit durch ein Rohr mit dem Radius r und der Länge l wird mit dem Gesetz von Hagen-Poiseuille beschrieben [6, Gesetz von Hagen-Poiseuille]. Die Gleichung 18 beinhaltet die mathematische Beschreibung der Gesetzmäßigkeit und Abbildung 4 veranschaulicht die Zusammenhänge. In der Abbildung 4 wird gezeigt wie ein Volumen pro Zeit durch eine konstante Fläche z zwischen den Radien r und $r + \Delta r$ fließt.

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\mu l} = \frac{\pi R^4 \partial p}{8\mu \partial z} \quad (18)$$

Die Variablendefinitionen der Gleichung 18 sind in der Tabelle II definiert und beschrieben.

IV. MODELLBILDUNG

Das Modell eines Rohrs kann sehr abstrakt abgebildet werden. Ein Rohr besitzt eine variable Länge und hat eine Breite B . Weiterhin kann während des Verlaufs ein Bogen oder eine Krümmung vorkommen. Als Ausgangsmodell wurde eine Industriezeichnung gewählt, abgebildet in Abbildung 5. Die Werte der Abbildung 5 sind in Tabelle III aufgelistet. Diese

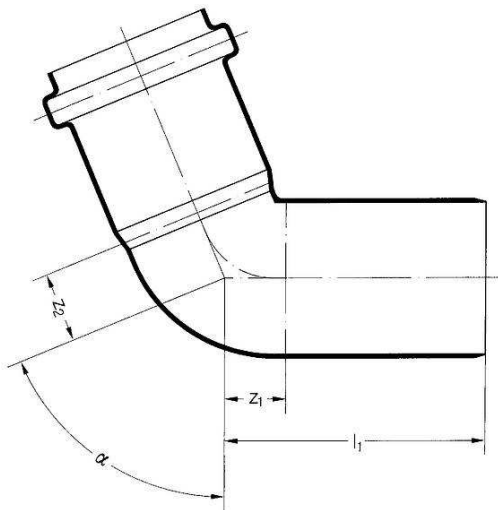


Abbildung 5. Ausgangsmodell eines Rohrs mit Bogen bzw. Knickung - Quelle: [5]

Variable	Bedeutung
α	67,5
l_1	78,0mm
z_1	16,0mm
z_2	20,0mm

Tabelle III
WERTE DER VARIABLEN IN ABILDUNG 5

Industriezeichnung wurde in ein Modell überführt. Es sind nicht alle Merkmale der Vorlage umgesetzt, hier ist eine erste Vereinfachung vorgenommen worden. Mit der Annahme, dass die kleinen Störstellen am oberen Ende keine Auswirkungen auf den Fluss des Fluids haben, sind diese nicht mit in die Betrachtung mit eingeflossen. Das Modell in Abbildung 7 zeigt die Modellierung der Industriezeichnung. Es ist ein einfaches längliches, im Bogen verlaufendes Gebilde. Dieses Gebilde besitzt am linken Ende eine variable Breite b . Die Breite b wird durch Gleichung 19 beschrieben und Abbildung 6 zeigt das Verhältnis des Unterteilungsverlaufes.

$$b = \frac{B}{N} \quad (19)$$

$$b1 = (B - b) * 2^{-1} = \quad (20)$$

$$\text{mit } N = \text{Unterteilungen}, B = \text{max. Breite} \quad (21)$$

Das N wird in Abschnitt V weiter behandelt. Dieser Wert wird für die einzelnen Simulationsdurchläufe variiert. Die Gleichung 19 beschreibt den Durchmesser b des Rohrs nach dem Bogen. Mit wachsenden N verringert sich der Schritt der Verkleinerung zum vorherigen N Wert. Es wurde eine solche Art der Änderung gewählt um mit wenigen Simulationsdurchläufen eine Breite Palette an Werten zu erhalten. Insgesamt besteht das Modell aus vier unterschiedlichen Elementen, einer Quelle und einer Senke. Diese Elemente sind in Abbildung 8 dargestellt und haben folgende Bedeutungen:

E1 Dieses Element steht in dieser Arbeit im Kern der Untersuchung. Hier wird der Durchmesser variiert.

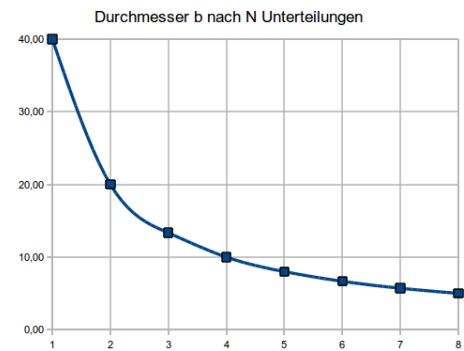


Abbildung 6. Abhängigkeit von b zu N Unterteilungen

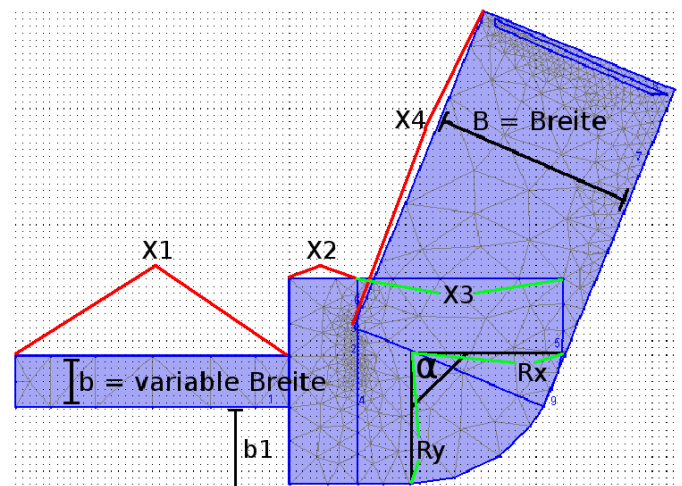


Abbildung 7. Modellbildung eines Rohrs mit den Parametern im COMSOL Multiphysics Modell

Dieses Element enthält weiterhin die Senke für das Fluid.

- E2** Allein aus historischen Gründen ist dieses Element noch vorhanden. Im Verlauf der Modellierung hat es sich ergeben, dass das Element nicht mehr benötigt wird. Eine gegen Null eingestellte Dicke ist in der Simulation nicht durchführbar. Die numerische Lösung liefert in diesem Fall keine konvergierende Lösung.
- E3** Mit diesem Element wird ein Knick bzw. ein Bogen ermöglicht. Es stellt einen runden Übergang zwischen $E1$, $E2$ und $E4$ zur Verfügung. In der Umsetzung ist dieser Bogen variabel, dies wird in der Simulation allerdings nicht weiter betrachtet.
- E4** Dieses Element dient der Rohrverlängerung und als Beschleunigungs- bzw. Fluidstabilisierungsstück des Fluids im Rohr. Es enthält die Quelle aus der das Fluid in das Rohr einströmt.

Quelle Einspeisung des Fluid.

Senke Ausgang für das Fluid.

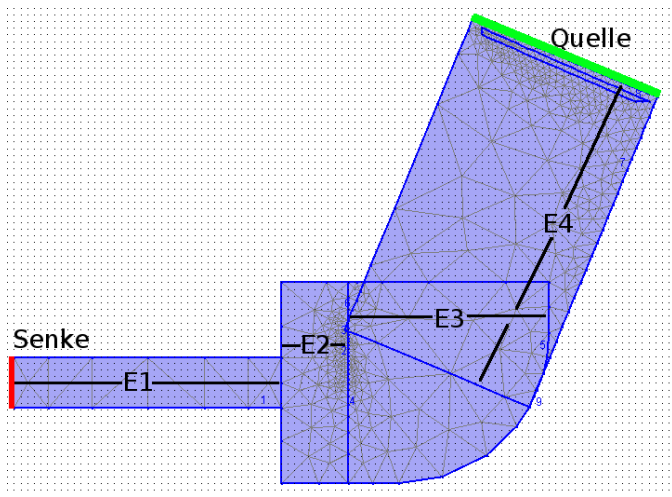


Abbildung 8. Modellelemente der abstrakten Modellierung des verwendeten Rohrs

V. UMSETZUNG IN COMSOL

COMSOL Multiphysics bietet die Möglichkeit *Computer-Added Design* (CAD) Modelle zu importieren, welche durch kompliziert zu bedienende CAD Programme erstellt worden sind. Je abstrakter eine Ansicht auf die Wirklichkeit geschaffen werden kann, spricht mit wie wenig Mitteln wie möglich ein Modell möglich ist, desto einfacher kann eine Umsetzung mit dem COMSOL Multiphysics eigenen CAD Werkzeug geschaffen werden. Das Problem ist im Allgemeinen, dass eine geeignete Abstraktionsebene definiert bzw. ermittelt werden muss. Diese Arbeit benutzt das Modell in Abbildung 7 aus dem vorherigen Abschnitt. Dieses Modell besitzt eine sehr hohe Abstraktion der Industriezeichnung aus 5, genau genommen war der Schritt der Abstraktion nicht sehr groß. Das Ausgangsmodell besitzt keine schwierigen oder komplexen Elemente, so dass fast eine Eins-zu-eins-Umsetzung erfolgen kann. Mit dem COMSOL Multiphysics CAD Programm wurde somit das Modell erstellt, der obere rechte Bereich als Eingang (in COMSOL *Inlet*) und der linke untere Bereich als Ausgang (in COMSOL *Outlet*) definiert. In diesem Abschnitt werden die Parameter und Einstellungen des Modells vorgestellt und erläutert. Die Tabelle IV beinhaltet die Werte für die geometrischen Werte und Tabelle V die Simulation relevanten Daten.

VI. ERGEBNISSE

Die Abbildung 9 zeigt die Ergebnisse der Simulationen durchläufe die jeweils konvergieren. In den Skalen rechts von den einzelnen Diagrammen sind die Werte der falsch Farben Darstellungen dargestellt. Es zeigt sich, dass die maximalen Werte jeweils unterschiedlich sind. Die Werte sind: (1) $9,177 \frac{m}{s}$, (2) $13,9 \frac{m}{s}$, (3) $22,73 \frac{m}{s}$ und (4) $23,62 \frac{m}{s}$. Weiterhin ist zu erkennen das in der Mitte der Verengungen unterschiedliche Geschwindigkeiten vorliegen, diese sind geschätzt aus den Diagrammen: (1) $9m * s^{-1}$, (2) $13m * s^{-1}$, (3) $22m * s^{-1}$ und (4) $10m * s^{-1}$. Das ist erstaunlich, das

Variable	Bedeutung
R	wahlfrei
$angleTube$	67,5
α	$90,0 - angleTube$
b	siehe Gleichung 19
$b1$	$(B - b)/2$
B	B
Rx	$x1 + x3 + B - [\cos(\frac{2*\pi}{4} - angleTube * R) - R]$
Ry	$R + [\sin(\frac{2*\pi}{4} - angleTube) * R]$
$x1$	wahlfrei
$x2$	wahlfrei
$x3$	B
$x4$	wahlfrei

Tabelle IV
BEDEUTUNG DER PLATZHALTER IN ABBILDUNG 7

Variable	Wert	Beschreibung
$p_0(hPa)$	1024	Atmosphärendruck
$v_0(m * s^{-1})$	5	Eingangsgeschwindigkeit
$v_{in}(m * s^{-1})$	$(v_0 * \cos(\alpha), v_0 * \sin(\alpha))$	resultierende Geschwindigkeit
$T_0(C)$	20	Umgebungstemperatur
$T_{Wasser}(C)$	30	Wassertemperatur

Tabelle V
DEFINITION DER SIMULATION RELEVANTEN DATEN DES SIMULATIONSMODELLS

letzte Diagramm (4) hat eine ähnliche Geschwindigkeit wie (1). Die Diagramme (1) bis (3) zeigen eine Steigerung der Geschwindigkeit. Diagramm (4) zeigt weiterhin, dass am Eingang der Verengung eine Turbulenz auftritt, dort ist die geschätzte maximale Flußgeschwindigkeit $15m * s^{-1}$. Der maximale Wert von $23,62m * s^{-1}$ stellt sich am Ende des Rohrs ein.

VII. DISKUSSION

Durch die Gleichung 18 ist nachvollziehbar weshalb sich die Geschwindigkeit erhöht. In der Simulation wird ein *inkompressibles Fluid* verwendet, welches seine Dichte bei Druck- oder Temperaturänderung nicht ändert. Dadurch folgt der Schluss das sich das Delta zwischen Eingangs- und Ausgangsdruck erhöht, zusätzlich zum abnehmenden Durchmesser. Aus diesen Werteänderungen folgt eine höhere Geschwindigkeit des Fluids und beschreibt das Verhalten der Diagramme (1) bis (3) in Abbildung 9.

Das Diagramm (4) beinhaltet wie zuvor erwähnt eine Besonderheit, ausgeprägt durch eine Turbulenz zum Eingang der Verengung. Die auftretende Verwirbelung kann womöglich durch die *Reynolds-Zahl* beschrieben werden. An dieser Stelle scheint eine hohe *Reynolds-Zahl* vorzuliegen und die kinetische Energie überwiegt vor der Reibung und es kommt zu Verwirbelungen. Dies scheint soweit einleuchtend zu sein, da das Fluid sich mit hoher Wahrscheinlichkeit - da inkompressibel - versucht die selbe Masse zu bewegen, auf einen kleineren Raum, wodurch sich die Energie erhöht, was durch $E_{Kinetisch} = \frac{1}{2}m * v^2$ einleuchtend ist (vgl. Gleichung 14).

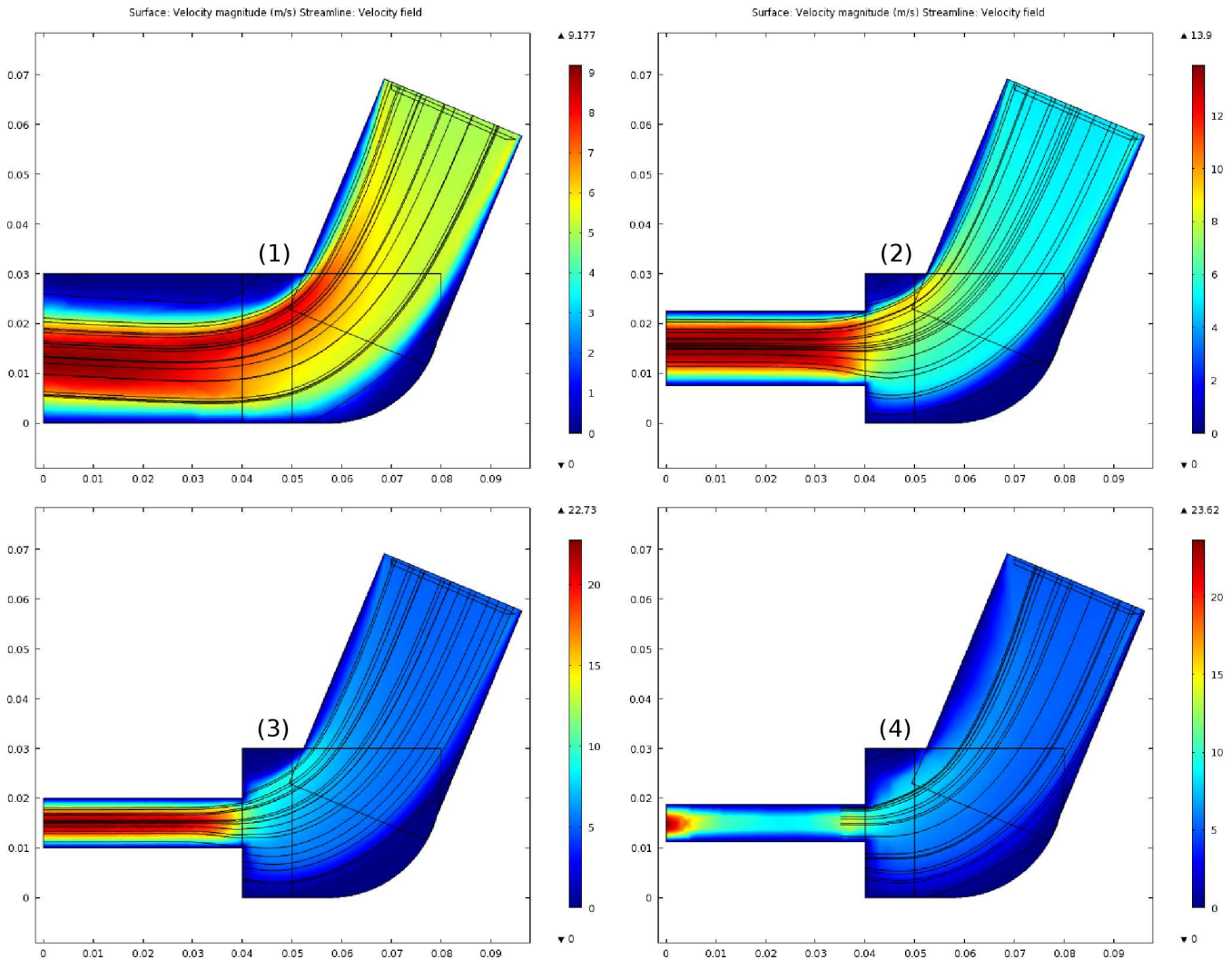


Abbildung 9. Geschwindigkeitsdiagramme für $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ (den Diagrammnummern entsprechend)

VIII. ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde gezeigt, dass das hier vorgestellte und benutzte Modell eine sehr gute Abstraktion der Realität beschreibt. Die Ergebnisse der Simulationen durchläufe veranschaulichen das Verhalten des Fluids bei abnehmenden Durchmesser, mit gleich bleibender Masse.

LITERATUR

- [1] COMSOL Multiphysics Simulation Software, URL: <http://www.comsol.com>
- [2] COMSOL Multiphysics Simulation, *Theory for the Laminar Flow Interface*, Mitgeliefertes Hilfesystem, Version 4.0
- [3] W. Demtröder, *Experimental Physik 1 - Mechanik und Wärme*, 3. Auflage, Springer Verlag, ISBN: 3-540-43559-X
- [4] Dr. Faber, Experimentelle Physik, Physik für Mediziner, Uni Würzburg, Skript, 25. August 2010, URL: http://bio.physik.uni-wuerzburg.de/people/faber/VORLESUNG/Mechanik_Teil3.pdf
- [5] Tech Börse - Industrie-Teile, Art.-Nr.: HTB-P65V76, URL: <http://www.techboerse.de>
- [6] Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, URL: <http://www.wikipedia.org>